

**ODREĐIVANJE BRZINE ZVUKA U GASOVIMA  
IZ SBWR JEDNAČINE STANJA**

**DETERMINATION OF THE SOUND SPEED IN GASSES  
FROM THE SBWR EQUATION OF STATE**

**Dr. Muhamed Bijedić, vanr.prof.**  
Tehnološki fakultet  
Tuzla

**Dr. Nagib Neimarlija, vanr.prof.**  
Mašinski fakultet  
Zenica

**Mr. Enver Đidić, dipl.ing.**  
BNT-TMiH  
Novi Travnik

**Ključne riječi:** jednačina stanja, brzina zvuka, termodinamičke osobine

**REZIME**

*Predložena je metoda za računanje brzine prostiranja zvuka u gasovima. Metoda je zasnovana na SBWR jednačini stanja koja dobro opisuje  $p$ - $v$ - $T$  površinu velikog broja tehnički interesantnih gasova, a koristi poznatu termodinamičku jednakost kvadrata brzine zvuka i parcijalne derivacije pritiska po gustini pri konstantnoj entropiji. Računata je brzina prostiranja zvuka u gasovitom etanu, u opsegu pritiska 0,01394 do 10,4557 MPa i temperature 220 do 450 K. Srednje apsolutno odstupanje računate od eksperimentalne brzine zvuka je 0,99% u cijelom posmatranom opsegu pritiska i temperature.*

**Key words:** equation of state, speed of sound, thermodynamic properties

**SUMMARY**

*The method of calculation of the sound speed in gasses is proposed. It is based on the SBWR equation of state, which describes well  $p$ - $v$ - $T$  surface of the number of technically interesting gasses. It uses well-known thermodynamic equality of the sound speed square and partial derivative of pressure with respect to density at constant entropy. The sound speed in gaseous ethane is calculated in the pressure range of 0.01394 to 10.4557 MPa and temperature range of 220 to 450 K. The average absolute deviation of calculated and experimental sound speed is 0.99% in the whole range of pressure and temperature.*

## 1. UVOD

Precizne i sveobuhvatne termodinamičke osobine čistih gasova, i njihovih smjesa, potrebne su i proizvođačima i korisnicima tih gasova. U te osobine spadaju: gustina, brzina zvuka, izobarski i izohorski toplotni kapacitet. Jednačine stanja, koje se rutinski koriste za računanje ovih osobina su onoliko dobre koliko i eksperimentalni podaci na kojima su zasnovane. U tom kontekstu, precizne vrijednosti brzine zvuka su od neprocjenjive vrijednosti za upotrebu u konstrukciji jednačine stanja.

U svjetlu veoma visoke preciznosti sa kojom se može mjeriti brzina zvuka, takođe je interesantno da se istraži mjera do koje se druge termodinamičke osobine gasova mogu direktno dobiti iz akustičkih rezultata. Ovo bi bilo posebno važno u području gdje neke druge veličine nisu mjerene sa dovoljnom tačnošću. Ustvari, sve druge interesantne termodinamičke osobine gasa mogu se izračunati iz brzine zvuka numeričkom integracijom diferencijalne jednačine. Ako se zadaju početni uslovi za tu integraciju, analiza vodi do gustina gasa i toplotnih kapaciteta čija se tačnost može porediti sa tačnošću koju mogu postići najpažljiviji eksperimentatori [1]. Sa druge strane, brzine zvuka se mogu dobiti iz  $(p, v, T)$  i toplotnog kapaciteta samo diferenciranjem, što povećava nepouzdanost eksperimenta.

Moguće je numerički predložiti empirijsku parametrizaciju  $pvT$  površine i fitovati je samo sa brzinom zvuka. Međutim, kako u ovoj metodi nisu zadati početni uslovi, ne postoji garancija da je rezultujuća  $pvT$  površina tačna, čak i ako je brzina zvuka tačno reprodukovana. Zaista, postoji dokaz da, sa čisto empirijskom parametrizacijom,  $pvT$  površina može sadržavati dosta velike greške, a istovremeno obezbjeđivati prilično tačnu reprezentaciju brzine zvuka. Zbog toga, mada ova metoda može biti korisna u nekim slučajevima ona nije pogodna za dobijanje rezultata sa velikom tačnošću. Ipak, ova situacija se može dramatično poboljšati usvajanjem na teoriji zasnovane jednačine stanja koja ima "tačan" funkcionalni oblik [2].

## 2. TEORIJA

Brzina zvuka  $u$  data je veoma poznatom jednačinom:

$$u^2 = M^{-1} \cdot (\partial p / \partial \rho)_S, \quad (1)$$

gdje je  $p$  pritisak,  $\rho$  molarna gustina,  $M$  molekulska masa, a  $S$  entropija. Izražena preko faktora kompresibilnosti  $Z=p/(\rho \cdot R \cdot T)$  i njegove izoternske i izohorske parcijalne derivacije, jednačina (1) ima oblik:

$$u^2 = (R \cdot T / M) \cdot \left\{ \left[ Z + \rho \cdot (\partial Z / \partial \rho)_T \right] + (R / C_{vm}) \cdot \left[ Z + T \cdot (\partial Z / \partial T)_\rho \right]^2 \right\} \quad (2)$$

Ovdje je  $C_{vm}$  molarni izohorski toplotni kapacitet, koji se za gas može napisati:

$$C_{vm} = C_{vm}^{ig} - R \cdot \int_0^\rho \left[ 2 \cdot T \cdot (\partial Z / \partial T)_\rho + T^2 \cdot (\partial^2 Z / \partial T^2)_\rho \right] \cdot \rho^{-1} \cdot d\rho, \quad (3)$$

gdje je  $C_{vm}^{ig}$  molarni izohorski toplotni kapacitet idealnoga gasa.

Soave-Benedict-Webb-Rubinova jednačina stanja gasa [3] može se napisati u obliku:

$$Z = 1 + B \cdot \rho + C \cdot \rho^2 + D \cdot \rho^4 + E \cdot \rho^2 \cdot (1 + F \cdot \rho^2) \cdot \exp(-F \cdot \rho^2), \quad (4)$$

gdje su  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  i  $F$  koeficijenti koji zavise od temperature. Imajući u vidu jednačinu (4) sada imamo:

$$Z + \rho \cdot (\partial Z / \partial \rho)_T = 1 + 2 \cdot B \cdot \rho + 3 \cdot C \cdot \rho^2 + 5 \cdot D \cdot \rho^4 + 3 \cdot E \cdot \rho^2 \cdot (1 + F \cdot \rho^2) \cdot \exp(-F \cdot \rho^2) - 2 \cdot E \cdot F^2 \cdot \rho^6 \cdot \exp(-F \cdot \rho^2) \quad (5)$$

$$Z + T \cdot (\partial Z / \partial T)_\rho = 1 + [B + T \cdot (\partial B / \partial T)] \cdot \rho + [C + T \cdot (\partial C / \partial T)] \cdot \rho^2 + [D + T \cdot (\partial D / \partial T)] \cdot \rho^4 + [E + T \cdot (\partial E / \partial T)] \cdot \rho^2 \cdot (1 + F \cdot \rho^2) \cdot \exp(-F \cdot \rho^2) \quad (6)$$

Da bi se iz jednačine (2) dobila brzina zvuka u gasu, pri nekom pritisku  $p$  i temperaturi  $T$ , potrebno je prethodno izračunati molarni izohorski toplotni kapacitet gasa. Do ove informacije može se doći numeričkom integracijom jednačine (3), ako se prije toga izračuna gustina gasa iz jednačine (4). U ovom radu jednačina (4) rješavana je Millerovom metodom kvadratne interpolacije, dok je integral u jednačini (3) rješavan metodom Gauss-Legendrea. Parcijalne derivacije koeficijenta kompresibilnosti iz jednačine (4):

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho} = B + 2 \cdot C \cdot \rho + 4 \cdot D \cdot \rho^3 + 2 \cdot E \cdot \rho \cdot \exp(-F \cdot \rho^2) \cdot (1 + \rho^2 - F^2 \cdot \rho^4) \quad (7a)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{\partial B}{\partial T} \cdot \rho + \frac{\partial C}{\partial T} \cdot \rho^2 + \frac{\partial D}{\partial T} \cdot \rho^4 + \frac{\partial E}{\partial T} \cdot \rho^2 \cdot (1 + F \cdot \rho^2) \cdot \exp(-F \cdot \rho^2) \quad (7b)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \cdot \rho + \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} \cdot \rho^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial T^2} \cdot \rho^4 + \frac{\partial^2 E}{\partial T^2} \cdot \rho^2 \cdot (1 + F \cdot \rho^2) \cdot \exp(-F \cdot \rho^2) \quad (7c)$$

Koeficijenti u jednačini (4) i njihove parcijalne derivacije:

$$B = \frac{R \cdot T_c}{P_c} \cdot \left\{ \beta_c + b_1 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-1,6} \right] + b_2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-3,2} \right] \cdot \omega \right\} \quad (8a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{R}{P_c} \cdot \left[ 1,6 \cdot b_1 \cdot \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-2,6} + 3,2 \cdot b_2 \cdot \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-4,2} \cdot \omega \right] \quad (8b)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} = \frac{R}{P_c \cdot T_c} \cdot \left[ -4,16 \cdot b_1 \cdot \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-3,6} - 13,44 \cdot b_2 \cdot \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-5,2} \cdot \omega \right] \quad (8c)$$

$$C = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^2 \cdot \left[ \gamma_c + c_1 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) + c_2 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)^2 + c_3 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)^3 \right] \quad (9a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^2 \cdot \frac{T_c}{T^2} \cdot \left[ -c_1 - 2 \cdot c_2 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) - 3 \cdot c_3 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)^2 \right] \quad (9b)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial T^2} = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^2 \cdot \frac{T_c}{T^3} \cdot \left[ 2 \cdot c_1 \cdot + 2 \cdot c_2 \cdot \frac{T_c}{T} + 4 \cdot c_2 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) + 6 \cdot c_3 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{T_c}{T} + 1 \right) \right] \quad (9c)$$

$$D = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^4 \cdot \delta_c \cdot \frac{T_c}{T} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial D}{\partial T} = -R^4 \cdot \frac{T_c^5}{P_c^4} \cdot \frac{\delta_c}{T^2} \quad (10b)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial T^2} = 2 \cdot R^4 \cdot \frac{T_c^5}{P_c^4} \cdot \frac{\delta_c}{T^3} \quad (10c)$$

$$E = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^2 \cdot \left[ \varepsilon_c + e_1 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) + e_2 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)^2 + e_3 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)^3 \right] \quad (11a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^2 \cdot \frac{T_c}{T^2} \cdot \left[ -e_1 - 2 \cdot e_2 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) - 3 \cdot e_3 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)^2 \right] \quad (11b)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^2 \cdot \frac{T_c}{T^3} \cdot \left[ 2 \cdot e_1 \cdot + 2 \cdot e_2 \cdot \frac{T_c}{T} + 4 \cdot e_2 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) + 6 \cdot e_3 \cdot \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{T_c}{T} + 1 \right) \right] \quad (11c)$$

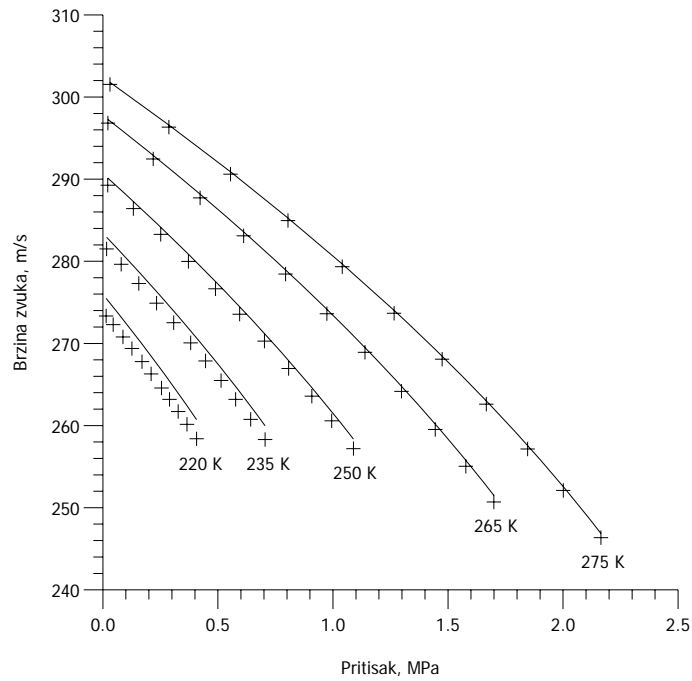
$$F = \left( \frac{R \cdot T_c}{P_c} \right)^2 \cdot \phi \quad (12)$$

Parametri koeficijenata iz jednačine (4) dati su u prilogu rada

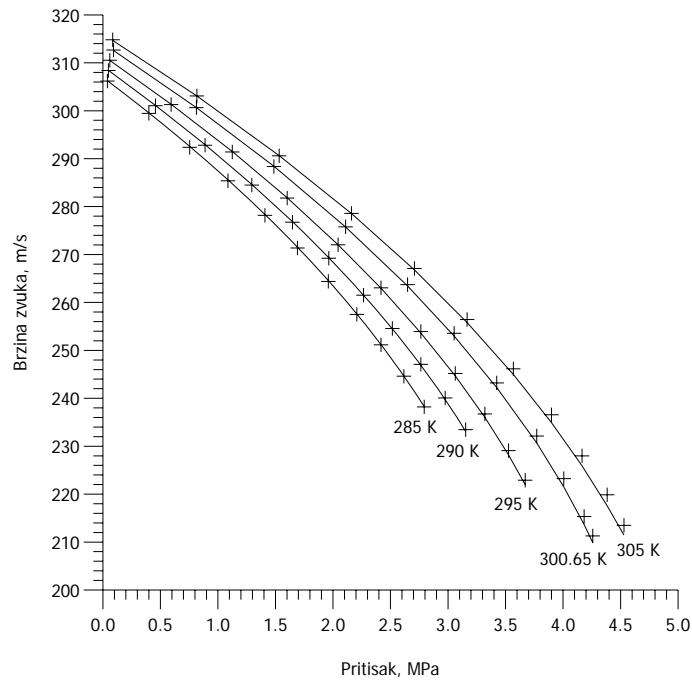
### 3. REZULTATI

Na slikama 1 do 4 date su vrijednosti brzine zvuka u gasovitom etanu računatih predloženom metodom. Pokriven je opseg pritiska od 0,01394 do 10,4557 MPa i temperature 220 do 450 K. Vrijednosti označene znakom (+) odnose se na eksperimentalne podatke [4], dok puna linija povezuje vrijednosti dobijene računom.

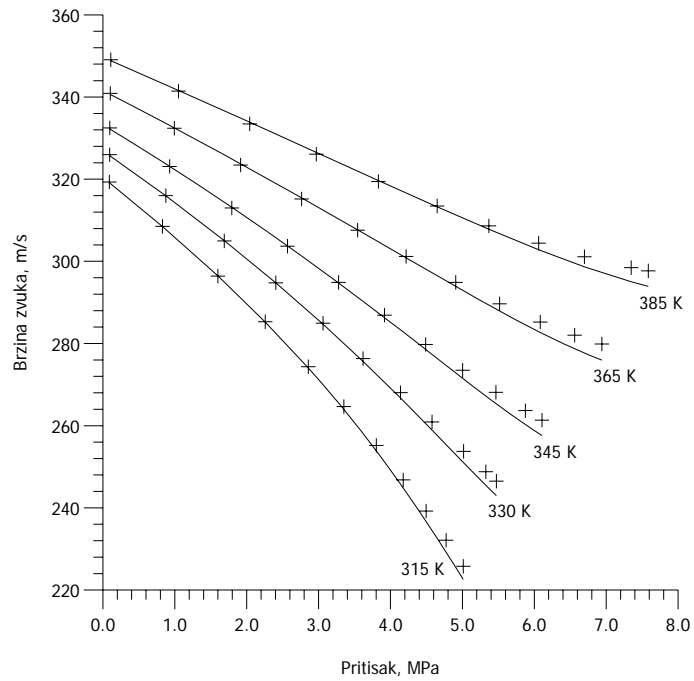
Kao što se sa slika vidi, slaganje izračunatih sa eksperimentalnim vrijednostima brzine zvuka je odlično u najvećem dijelu posmatranog opsega pritiska i temperature. Odstupanja su nešto veća pri višim pritiscima. Srednje apsolutno odstupanje računate od eksperimentalne brzine zvuka je 0,99% u cijelom posmatranom opsegu pritiska i temperature.



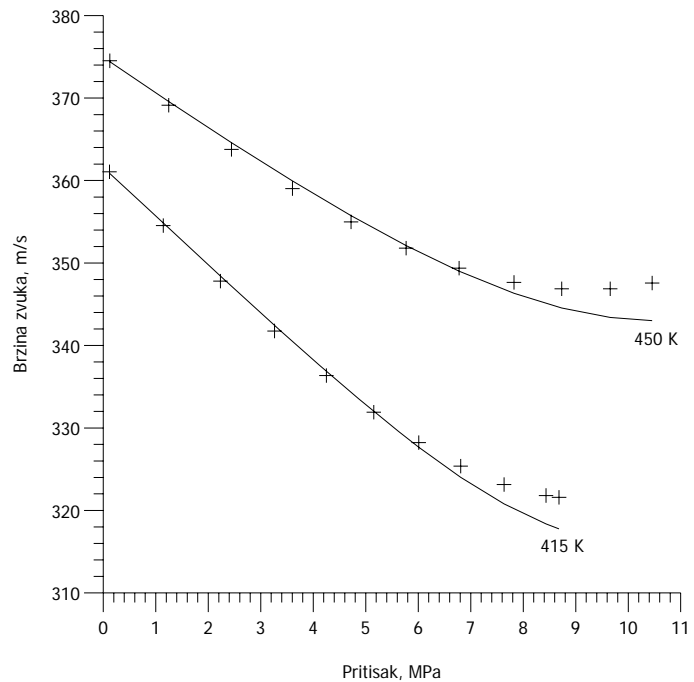
SLIKA 1. BRZINA ZVUKA U GASOVITOM ETANU U FUNKCIJI PRITISKA, PRI TEMPERATURAMA 220 K, 235 K, 250 K, 265 K I 275 K.



SLIKA 2. BRZINA ZVUKA U GASOVITOM ETANU U FUNKCIJI PRITISKA, PRI TEMPERATURAMA 285 K, 290 K, 295 K, 300,65 K I 305 K.



SLIKA 3. BRZINA ZVUKA U GASOVITOM ETANU U FUNKCIJI PRITISKA, PRI TEMPERATURAMA 315 K, 330 K, 345 K, 365 K I 385 K.



SLIKA 4. BRZINA ZVUKA U GASOVITOM ETANU U FUNKCIJI PRITISKA, PRI TEMPERATURAMA 415 K I 450 K.

#### 4. ZAKLJUČAK

Ispitana je metoda po kojoj se informacija o brzini prostiranja zvuka u gasovima može dobiti direktno iz jednačine stanja. Odlična slaganja sa direktnim mjerenjem brzine zvuka jasno pokazuju da SBWR jednačina stanja, čiji je funkcionalni oblik utemeljen na eksperimentalnim podacima dobijenim direktnim mjerenjem gustine, može kvalitetno opisati i brzinu zvuka. Tačnost opisane metode može se povećati provedbom nelinearne regresije eksperimentalnih brzina zvuka, sa ciljem optimiranja parametara jednačine stanja.

#### 5. LITERATURA

- [1] Trusler J.P.M., Zarari M., The Speed of Sound and Derived Thermodynamic Properties of Methane at Temperatures Between 275 K and 375 K and Pressures up to 10 MPa, Journal of Chemical Thermodynamics, Vol. 24, 1992, 973-991.
- [2] Trusler J.P.M., Equation of State for Gaseous Propane Determined from the Speed of Sound, International Journal of Thermophysics, Vol. 18, No. 3, 1997, 635-654.
- [3] Soave, G.S., A Noncubic Equation of State for the Treatment of Hydrocarbon Fluids at Reservoir Conditions, Ind. Eng. Chem. Res., Vol. 34, No.11, 1995, 3981-3994.
- [4] Estrada-Alexanders A.F., Trusler J.P.M., The Speed of Sound and Derived Thermodynamic Properties of Ethane at Temperatures Between 220 K and 450 K and Pressures up to 10.5 MPa, Journal of Chemical Thermodynamics, Vol. 29, 1997, 991-1015.

#### 6. DODATAK

Parametri koeficijenata iz jednačine (4):

$$b_1 = 0,422; b_2 = 0,2971$$

$$c_1 = -0,02663 + 0,06170 \cdot \omega + 0,00779 \cdot \omega^2$$

$$c_2 = -0,00605 + 0,07544 \cdot \omega - 0,06134 \cdot \omega^2$$

$$c_3 = 0,00153 + 0,03828 \cdot \omega + 0,01191 \cdot \omega^2$$

$$e_1 = 0,1087 + 0,2154 \cdot \omega - 0,0591 \cdot \omega^2$$

$$e_2 = 0,0705 + 0,3007 \cdot \omega + 0,4948 \cdot \omega^2$$

$$e_3 = -0,0068 + 0,1858 \cdot \omega - 0,1157 \cdot \omega^2$$

$$\phi = 0,06$$

$$\beta_c = b \cdot Z_c$$

$$\gamma_c = c \cdot Z_c^2$$

$$\delta_c = d \cdot Z_c^4$$

$$\varepsilon_c = e \cdot Z_c^2$$

$$b = \frac{1}{3} \cdot [15 \cdot Z_c - 8 + (2 \cdot f^2 - 2 \cdot f^3) \cdot \exp(-f)]$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot [5 \cdot Z_c - 8 - 3 \cdot b - (1 + f + f^2) \cdot \exp(-f)]$$

$$d = Z_c - 1 - b - c - e \cdot (1 + f) \cdot \exp(-f)$$

$$Z_c = 0,2908 - 0,099 \cdot \omega + 0,04 \cdot \omega^2$$

$$e = \frac{1}{2}; f = \phi / Z_c^2$$

